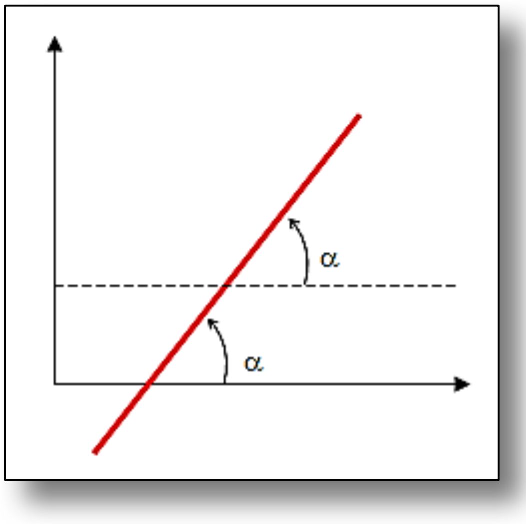
4. Diferenciação

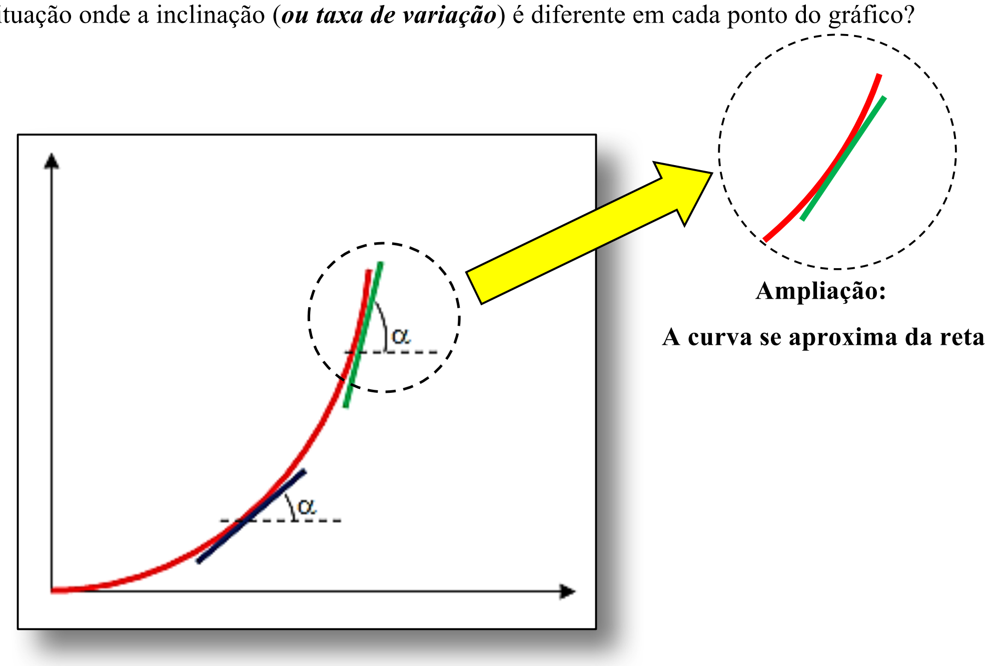
4.1 Ideia intuitiva de derivada

Problema 1. Como determinar a inclinação do gráfico (*ou **taxa de variação***) de uma função não linear?

Já vimos que no caso da função linear seu coeficiente angular (*ou **taxa de variação***) é ***m*** **= tg**$\boldsymbol{\alpha}$**.**



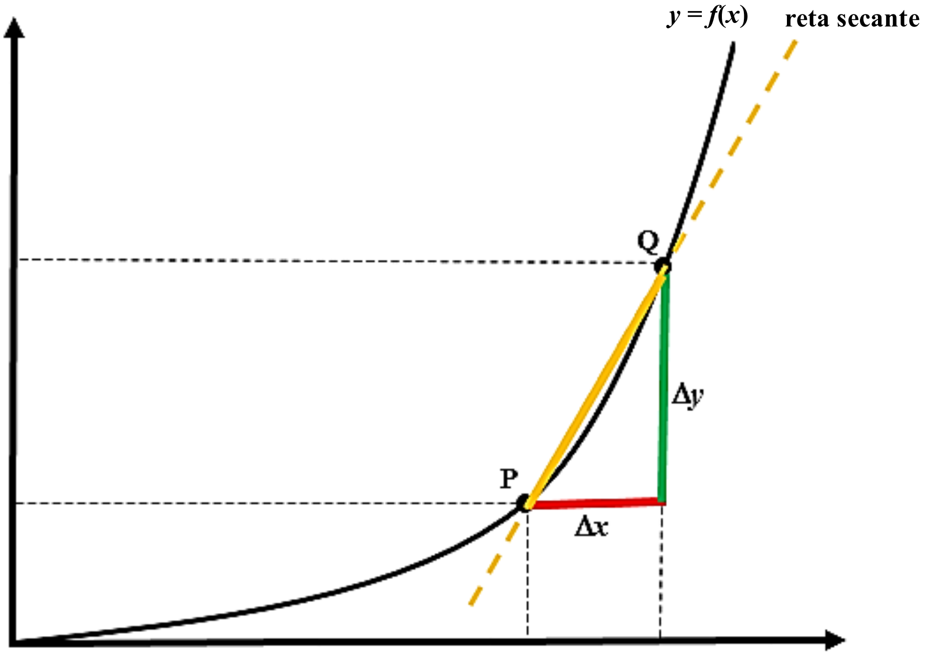
Como proceder na situação onde a inclinação (***ou taxa de variação***) é diferente em cada ponto do gráfico?



Como determinar a inclinação da reta tangente em cada ponto do gráfico?

4.2 A grande ideia

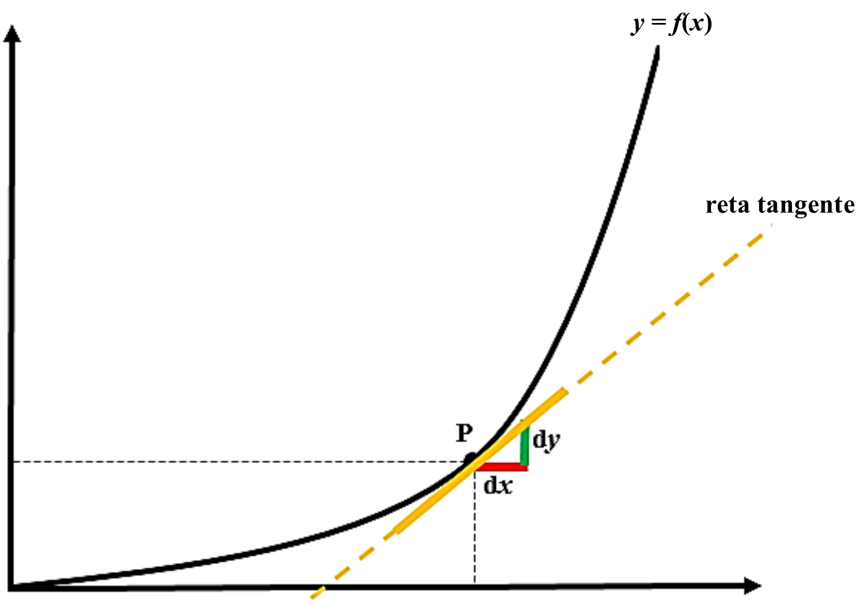
Considere a função $y = f(x)$ cujo gráfico é apresentado abaixo. Veja como determinar a inclinação do gráfico no ponto P.



Note que o coeficiente angular da reta secante é dado por:

$$\boxed{m_s = \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

Agora observe o que ocorre quando Δx se "**aproxima de 0**" ($\Delta x \to 0$).

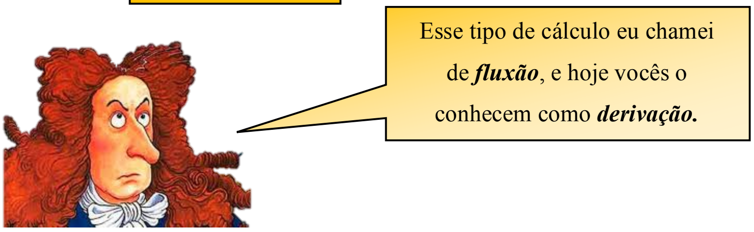


Já, o coeficiente angular da reta tangente é definido por:

$$\boxed{m_t = \frac{dy}{dx}}$$

Utilizando o conceito de limites escrevemos:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$



Vejamos agora como realizar esses cálculos na prática.

Exemplo. Sendo $y = f(x)$ onde $y = x^2$ calcule $\frac{dy}{dx}$ no ponto de abscissa x = 3.

Como interpretar o resultado desse cálculo? Qual seu significado?

Como você pode observar o cálculo da derivada envolve ***diferenças muito pequenas***, ou seja, os diferenciais das variáveis x (dx) e y (dy), por esse motivo o processo para encontrar a derivada de uma função também recebe o nome de ***Diferenciação*!**

Como generalizar esses resultados?

Existe uma técnica para o cálculo da derivada de uma função?

Quais são as outras notações utilizadas para indicar uma derivada?

As respostas para todas essas perguntas serão fornecidas na próxima aula!!

4.3 Definição. A derivada da função $y = f(x)$, em relação à variável x, é a função denotada e definida por:

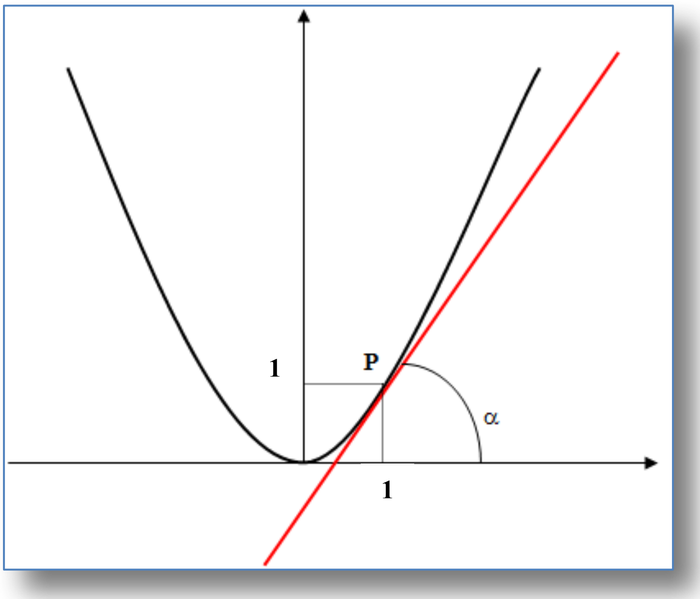
$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

Observações:

1. A derivada da função $y = f(x)$ também pode ser denotada por: $\dfrac{df}{dx}$ ou $f'(x)$.
2. $f'(x)$ é a função que nos fornece o ***coeficiente angular da reta tangente*** ao gráfico de f em cada ponto e também pode ser interpretada como uma ***taxa de variação instantânea*** de f.
3. O processo do cálculo da derivada de uma função é chamado ***diferenciação***.

Exemplo. Considere a função $y = f(x)$ onde $f(x) = x^2$.

a) Esboce o gráfico de f e trace a reta tangente a esse gráfico no ponto P(1,1).
b) Calcule $f'(1)$. Qual o significado desse número?
c) Encontre a equação da reta tangente citada no item anterior.
d) Determine a inclinação do gráfico de f no ponto P(1,1).



Observação – Nas proximidades de P, a função $f(x) = x^2$ pode ser aproximada pela reta tangente de equação $y = 2x - 1$. Observe a tabela abaixo:

x	$y = x^2$	**y = 2x - 1**
1,1	1,21	**1,2**
1,01	**1,021**	**1,02**

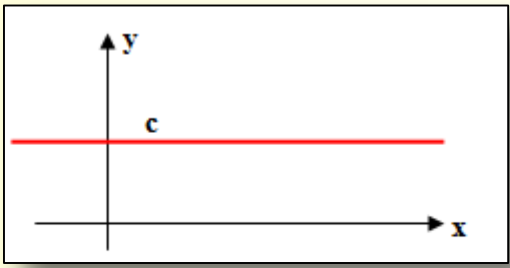
4.4 Regras de derivação

O processo para o cálculo de uma derivada através da definição pode ser muito trabalhoso, temos assim algumas regras (e propriedades) básicas de derivação.

REGRA 1 – Derivada da função constante

Se $f(x) = c$ onde $c \in R$, então $f'(x) = 0$.

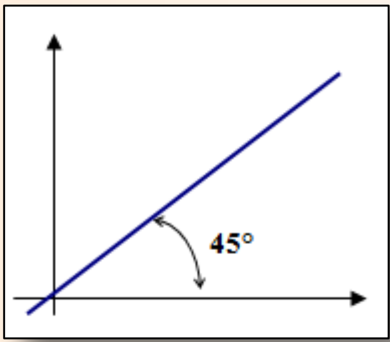
Exemplo: $f(x) = 2 \Rightarrow f'(x) = 0$ ou $\dfrac{df}{dx} = 0$.



REGRA 2 – Derivada da função identidade

Se $f(x) = x$ ou $y = x$ então $f'(x) = 1$.

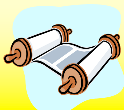
Exemplos: a) $y = x \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = 1$ b) $S = t \Rightarrow \dfrac{dS}{dt} = 1$



REGRA 3 – Derivada da potência

Se $f(x) = x^n$ onde $n \in R$, então $f'(x) = n.x^{n-1}$

Exemplos: a) $f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$ b) $S = t^3 \Rightarrow \dfrac{dS}{dt} = 3t^2$ c) $p = t^5 \Rightarrow \dfrac{dp}{dt} = 5t^4$



LEMBRETE: $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$, $a \neq 0$ e $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Exercício – Calcule a derivada das seguintes funções:

a) $f(x) = \sqrt{x}$ b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ c) $S = \sqrt[3]{t^2}$

REGRA 4 – Derivada do múltiplo constante

Seja $c \in R$ uma constante e $y = f(x)$ uma função, então $(c.f)' = c.f'$.

Exemplos: a) $y = 4x^3$ b) $f(x) = 3x$ c) $p = 2\sqrt{t}$ d) $s = \dfrac{2}{t}$ e) $F = kx$.

REGRA 5 – Derivada da soma e diferença

Sendo f e g duas funções diferenciáveis temos:

$$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x) \text{ e } [f(x) - g(x)]' = f'(x) - g'(x)$$

Exemplos:

a) $f(x) = x^2 - 2x$ b) $y = x^2 + 5$ c) $S = 3t^4 - 5t^2 + 6$ d) $S = t + \dfrac{1}{t}$